Mathématiques aux élèves
Site web : http://www.matheleve.net/
Email : contact @matheleve.com

Probabilité sur un ensemble fini

Cours | *4ème Sci et inf*

I) Rappel

Activité

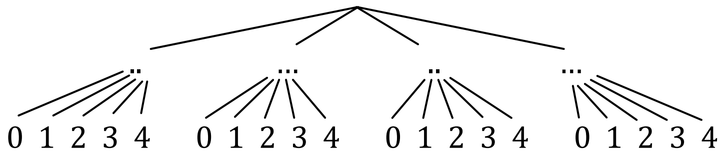
Première situation :

1) Quels sont les nombres de deux chiffres que l'on peut former sachant que ces deux chiffres sont inférieurs ou égaux à 4 ?

Arbre

Dizaine :

Unité :



Nombre : 10 11 12 ....

Il y a donc .... nombres possibles

Tableau

dizaines \ unités	1	2	3	4
0	10	20	30	40
1	11			
2				
3				
4				

2) Combien de nombres de 5 chiffres distincts peut-on former ?

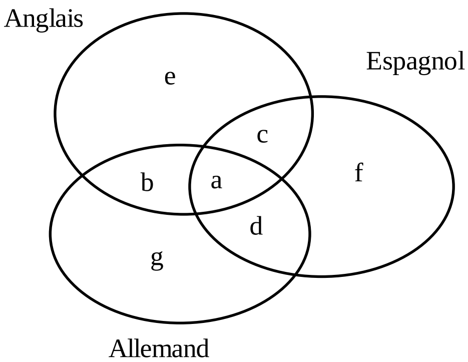
Choix successifs

Il y a ..... choix possibles pour le 1er chiffre, ... pour le 2ème, ... pour le 3ème, ... pour le 4ème et ..... pour le 5ème.

Il y a donc en tout ..... × ...... × .... × ...... × ...... = ... nombres de 5 chiffres distincts.

Deuxième situation : Dans une classe, chaque élève étudie au moins l'une des 3 langues suivantes : Anglais, Allemand, Espagnol. Combien y a-t-il d'élèves en tout ?

Combien y' a-t-il d'élèves dans la classe sachant que :	Traduction des hypothèses :
5 élèves étudient les 3 langues	$a = 5$
7 élèves étudient l'anglais et l'allemand	a+b=..........................
8 élèves étudient l'anglais et l'espagnol	a+c=..........................
9 élèves étudient l'allemand et l'espagnol	....
	....
En tout, 20 élèves font de l'anglais	....
15 élèves font de l'allemand	....
18 élèves font de l'espagnol	



Par hypothèses :

$a = 5$ et $a + b = 7$ donc b= ......

$a + c = 8$ donc $c =$ ....

$a + d = 9$ donc $d =$ ....

$a + b + c + e = 20$ donc $e =$ ....

$a + b + d + g = 15$ donc $g =$ ....

$a + c + d + f = 18$ donc $f =$ ......

Combien y a-t-il d'élèves en tout ?

II) Expériences aléatoires

Activité

1)a) Combien peut-on former de mots de 2 lettres avec les lettres A, B, C

………

………

b) Combien peut-on former de mots de 5 lettres avec les 26 lettres de l'alphabet?

………

………

c) Combien peut-on former de mots de 5 lettres avec les lettres A, B, C

………

………

d) Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier …….

2)a) Combien peut-on former de mots de 3 lettres différentes avec les lettres A, B, C

………

………

b) * Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier ………

3)a) Combien peut-on former de mots de 2 lettres différentes avec les lettres A, B, C

………

b)Combien peut-on former de mots de 5 lettres différentes avec les 26 lettres de l'alphabet?

………

………

c)*Si $1 \leq p \leq n$. alors

- le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier………………………

4) a)Dans combien de manière peut-on choisir trois élèves parmi 5 sans tenir compte de l'ordre?

………

b) Dans une classe de 26 élèves, combien peut-on former de binômes de TP?

………

5) a)Parmi trois personnes, combien y a-t-il de possibilités de designer un trésorier, un secrétaire, un Président (le cumul de fonction n'étant pas permis)?

………

b) Le nombre de parties à p éléments de E est l'entier ………………

Définition et théorème.

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier …….

* Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier n!

*Si $1 \leq p \leq n$. alors

- le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier………………………
- le nombre de parties à p éléments de E est l'entier ………………

(L'entier C_n^p est aussi noté $\binom{p}{n}$ et on convient que $C_n^0 = \cdots \dots$).

Application1

1) Combien de manière peut-on choisir trois élèves parmi 5 sans tenir compte de l'ordre?
2) Dans une classe de 26 élèves, combien peut-on former de binômes de TP?
3) Parmi trois personnes, combien y a-t-il de possibilités de designer un trésorier, un secrétaire, un Président (le cumul de fonction n'étant pas permis)?

Application 2

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.

On tire successivement 6 boules, sans remise.

On appelle "tirage" cet ensemble de 6 numéros obtenus (sans tenir compte de l'ordre).

1) Combien y a-t-il de tirages au total ?

2) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent 3 numéros pairs et 3 numéros impairs ?

3) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins 5 numéros pairs ? (c'est-a-dire 5 numéros pairs ou 6Numeros pairs)

4) Répéter les questions 1,2 et 3 avec un tirage avec remise

III) Définition d'une probabilité sur un ensemble fini

Définition (Expérience aléatoire)

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultât est soumis au hasard et est donc imprévisible.

-L'ensemble E des issues d'une expérience est appelé univers.
-Les éléments de E sont appelés événements élémentaires
-Une partie A de E est appelée événement
-L'événement qui ne contient aucun résultat de l'expérience aléatoire est l'événement impossible, noté ∅ (ensemble vide).
-L'événement qui contient tous les résultats, c.-à-d. lui-même E est appelé événement certain.

Exemples

Une l'expérience aléatoire consiste a lancé un dé cubique non pipé. On observe le résultat obtenu.
*Décrire l'ensemble E ……………………………………………………………….….Donner son cardinal……
*Donner un exemple de résultat de l'expérience aléatoire……………………………………………………..
*Déterminer l'événement A =“On obtient un chiffre pair” ……………………………………………………..
*Donner un événement impossible …………………………………………………………………………………….

Définition : *Probabilité d'un évènement*

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire.

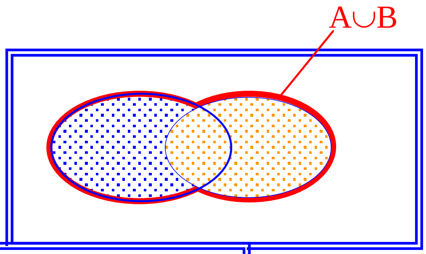
A chaque partie B de Ω, on fait correspondre un nombre compris entre 0 et 1, appelé **probabilité** de cet événement B tel que :

- La somme des probabilités des événements élémentaires qui composent Ω est égale à 1.
- La probabilité de B est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent B.
- La probabilité de l'événement impossible est 0.

On note p(B) la probabilité de l'événement B.

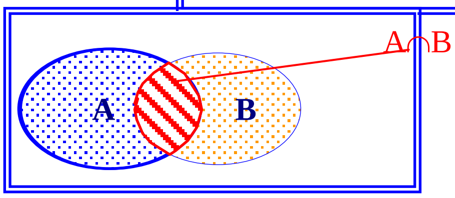
2. *Opérations sur les événements et leurs probabilités*

Définition : *Réunion d' événements*



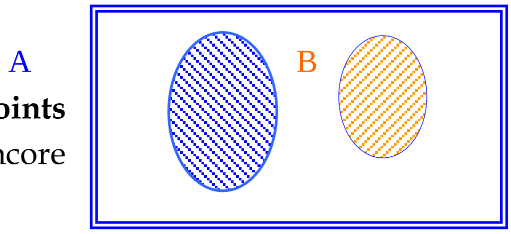
L'ensemble des éventualités réalisant l'événement A ou l'événement B est l'événement A∪B, réunion des événements A et B.

Définition : *Intersection d' événements*



L'ensemble des éventualités réalisant l'événement A et l'événement B en même temps est l'événement A∩B, intersection des événements A et B.

Définition : *Evènements incompatibles*



Deux événements A et B sont dits **incompatibles** ou **disjoints** lorsqu'ils ne peuvent se réaliser en même temps, ou encore lorsque A∩B = ∅.

Exemple

On lance un dé truqué. On donne le tableau suivant

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

1/avec A= { obtenir un nombre pair }et B={obtenir un multiple de 3 }

Déterminer A∩ B , A∪B puis p(A∩ B) et p(A∪B)

Comparer $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$. et $p(A\cup B)$

………

………

2/On a : A = « obtenir un nombre pair »et B = $\{5\}$

Que peut on dire de A et B.

………………………………………………..

Déterminer A∪B puis p(A∪B)

………

Comparer $p(A) + p(B)$ et $p(A\cup B)$

………

Théorème 1 :

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire et A et B deux événements de cet univers.

$p(A\cup B)$ = ...

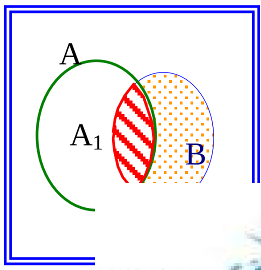
Si A et B sont incompatibles alors $p(A\cup B)$ = ………………………..

Démonstration : 1 . Si A et B sont incompatibles, alors A∪B est composée de tous les éléments de A et de tous les éléments de B. A∪B est réalisé avec les éléments de A ou les éléments de B. D'après la définition 5, la probabilité de A∪B est la somme des probabilités qui le composent. Donc $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$.

2. Soit A_1 l'événement tel que A = $A_1 \cup (A\cap B)$ et $A_1 \cap (A\cap B) = \varnothing$.

Ainsi, A_1 et $(A\cap B)$ forment une partition de A

donc $p(A) = p(A_1) + p(A\cap B)$ [1].

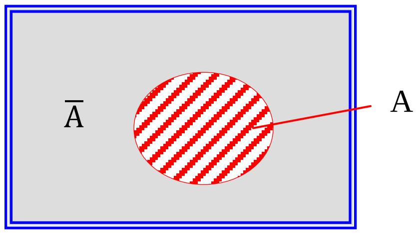


$A\cup B = A_1\cup B$ et $A_1\cap B = \varnothing$ donc $p(A\cup B) = p(A_1) + p(B)$ [2].

De [1] , on a $p(A_1) = p(A) - p(A\cap B)$.

En remplaçant dans [2], $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$.

Définition *: Evénements contraires*



Soit Ω un univers fini, A et B deux événement inclus dans Ω.
A et B sont deux événements contraires lorsque $A\cap B = \varnothing$ et $A\cup B=\Omega$.
L'événement contraire de A est noté $\overline{A}$. On dit que A et $\overline{A}$ **partitionnent** l'ensemble Ω .

Théorème :

Soit A un événement de Ω et $\overline{A}$ son événement contraire. $p(A) + p(\overline{A}) =$ ……….

Démonstration : Soit A un événement et $\overline{A}$ son contraire. Alors $A \cup \overline{A}$ = ….. et $A \cap \overline{A}$ = ……

donc $p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = p(\ldots\ldots) = 1$

$p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

Théorème :

Soit $A_1, A_2, \ldots A_n$ des événements de Ω deux à deux incompatibles, alors……………………….

………………………………………………………………………………………………

IV. Situation d'équiprobabilité

Exemples

Un lancer de dé non pipé, un jet de pièce non plombée, un jeu de cartes non truqué… nous amène à étudier une expérience aléatoire dite équiprobable. C'est à dire que chaque issue à la même chance de « sortir ».

Définition et théorème *: Equiprobabilité des issues*

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** des issues.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω_i : $p(\omega_i)$=……….

La probabilité d'un événement composé de k éventualités est égale à $p(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{k}{n}$.

ou encore, $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exercice.

Une urne contient 2 boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2,3,5 et 7

1)On tire simultanément et au hasard deux boules du l'urne.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : ''Les deux boules tirées sont de même couleur.''

B :'' Les deux boules tirées portent des numéros impairs.''

C :''Les deux boules tirées sont de même couleur et portent des numéros impairs.''

D :'' Les deux boules tirées sont de même couleur ou portent des numéros impairs.''

2) On tire successivement et avec remise deux boules du l'urne.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E :'' Les deux boules tirées sont de parité différentes.''

F : ''Obtenir au moins une boule noir.''

V)Probabilités conditionnelles

Exemple1

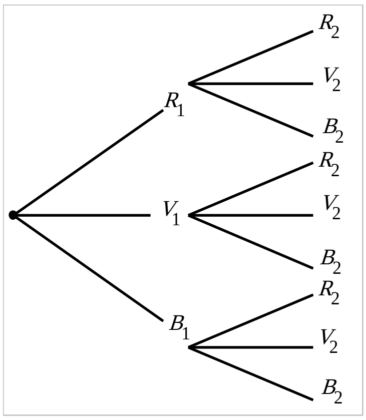
Une urne contient 3 boules rouges 2 boules vertes et 2 boule bleu.

On tire successivement deux boules sans remise. on s'intéresse à la probabilité de l'événement « On obtient exactement une boule rouge »

2. Arbre pondéré :Notre expérience aléatoire peut être modélisée par un arbre pondéré :

Sur chaque branche on indique les probabilités :

Compléter l'arbre



Exemple 2

Dans une classe de 36 élèves , 23 élèves ont 18 ans , 29 élèves sont des filles et 17 filles ont 18 ans

On choisit au hasard un élève de la classe . on s'intéresse aux événement suivants :

A = « l'élève est une fille » , B = « l'élève a 18 ans », $A \cap B$: l'élève est une fille de 18 ans.

P(A)=……………p(B)=……………..et p(A∩B)=………………..
……………………………………………………………

Mais si on sait que l'élève est une fille , ***<u>l'ensemble de référence chang</u>*****e** : la probabilité que l'élève ait 18 ans sachant que c'est une fille , est alors : …………………………. . on remarque alors que : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{17/36}{29/36} = \dfrac{17}{29}$

Comparer $p_A(B)$(La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé) et $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Théorème et définition 11: *Probabilité conditionnelle*

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire et $p(A) \neq 0$.

La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, est le nombre noté $p_A(B)$ et défini par $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$, est définie par : $p_B(A) = p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ ou $p(A \cap B) = p(A/B) \times p(B) = p(B/A) \times p(A)$

Attention $p_A(B)$ est différent de p(B) en général

Cas particulier : Indépendance de deux événements.

Lorsque deux événements sont indépendants, $p_A(B) = p(B)$ puisque A n'intervient pas dans la probabilité que A se réalise. De même $p_B(A) = p(A)$.

Ainsi, $p(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ et $p(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Remarques

- Ne pas confondre événements ***indépendants*** et événements ***incompatibles.***
- 2 événements A et B sont ***indépendants*** si $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$.
- 2 événements A et B sont ***incompatibles*** si $A\cap B = \varnothing$. et alors $p(A\cap B) = 0$.
- La notion d'indépendance dépend de la probabilité sur l'univers, celle d'incompatibilité est purement ensembliste. Deux évènements incompatibles ne sont jamais indépendants

a. Formule des probabilités totales

Définition et propriété préliminaire

Soit les événements B , B_1, B_2 et B_3 qui vérifient : B = $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$

- B_i et B_j incompatibles c'est à dire $B_i \cap B_j = \varnothing$ pour $i \neq j$. On dit alors que B_1 ,B_2, B_3 et B_4 forme une partition de B .

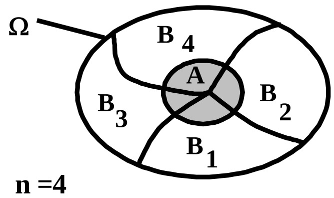
Dans ces conditions $p(B) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4)$

b. Formule des probabilités totales

Si l'univers Ω est la réunion de trois événements B_1, B_2 et B_3 deux à deux incompatibles et A étant un événement . On a :

$p(A) = p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + p(A\cap B_3) + p(A\cap B_4)$;

$p(A) = p(A)\times p_A(B_1) + p(A)\times p_A(B_2) + p(A)\times p_A(B_3) + p(A)\times p_A(B_4)$



n =4

cas général

Ω est l'ensemble des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire.

A_1, A_2, … , A_n désignent des sous-ensembles de Ω. Dire que A_1, A_2, … , A_n forment une partition de Ω signifie que les A_i sont deux à deux disjoints et que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$..Avec cette définition, on peut énoncer le théorème suivant.

Propriété : Formule des probabilités totales

A_1, A_2, … , A_n forment une partition de Ω.

Alors la probabilité d'un événement quelconque A est donné par : $p(A) = p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + \ldots + p(A\cap B_n)$

c'est à dire, lorsque $P(B_i) \neq 0$ pour tout i : $p(A) = p(A)\times p_A(B_1) + p(A)\times p_A(B_2) + \ldots. + p(A)\times p_A(B_n)$